

O Náhodném Růstu

Arthur Robson, Larry Samuelson, Jakub Steiner

Orlík, říjen 2022

Rozhodování za Nejistoty v Biologii

Pouštní semínko k svému klíčení potřebuje vláhu

Období dešťů přichází **náhodně**

Kdy má semínko vyklíčit?

- 1 když je déšť (a tudíž přežití) nejpravděpodobnější?
- 2 v náhodném okamžiku?



Investování za Nejistoty

Investor si vybírá mezi projekty

Některé projekty zkrachují, jiné budou ziskové

Jak má investor rozdělit svoji investici?

- 1 vložit vše do projektu s nejvyšším očekávaným výnosem?
- 2 či rozložit investici i mezi horší projekty?



Selekce Růstem

Pro každou možnou strategii

- semínek
- či investora

uvažujme dlouhodobý exponent růstu

- populace
- či majetku



Strategie, co maximalizuje exponent růstu, bude “všudypřítomná”

Naše Výsledky

“Representation Theorems”

evolučně optimální strategie $\Leftrightarrow$ výstup přirozeného rozhodovacího procesu

toužebné myšlení a racionální nepozornost



a



Model

Velká populace

Každou periodu $t = 1, 2, \dots$, každé individuum:

- počne potomka
- vybere si akci $a \in A$
- zemře
- potomek přežije s pravděpodobností $p(a, \theta_t)$

iid $\theta_t \sim p$, kde p je pravděpodobnostní rozdělení

Dvě verze:

- **individuální** risk: každé individuum čelí své **vlastní** realizaci θ_t
- **agregátní** risk: každé individuum čelí **stejně** realizaci θ_t

Model

Velká populace

Každou periodu $t = 1, 2, \dots$, každé individuum:

- počne potomka
- vybere si akci $a \in A$
- zemře
- potomek přežije s pravděpodobností $e^{u(a, \theta_t)}$

iid $\theta_t \sim p$, kde p je pravděpodobnostní rozdělení

Dvě verze:

- **individuální** risk: každé individuum čelí své **vlastní** realizaci θ_t
- **agregátní** risk: každé individuum čelí **stejně** realizaci θ_t

Evoluční Selektce

Strategie: $\alpha(a)$ – pravděpodobnostní rozdělení na A

Maximalizace koeficientu růstu populace

Individuální risk:

$$\max_{\alpha \in \Delta(A)} \ln E_{p, \alpha} e^{u(a, \theta)}$$

optimální je maximalizovat pravděpodobnost přežití potomka

Agregátní risk:

$$\max_{\alpha \in \Delta(A)} E_p \ln E_{\alpha} e^{u(a, \theta)}$$

$\Rightarrow$ optimální je “hedging” (randomizace)

Toužebné Myšlení

Úkol: vyber si $a \in A$,

Náhodná odměna $u(a, \theta)$, $\theta \sim p$

Procedura toužebného myšlení:

- vyber si subjektivní rozdělení q
- zaplať “cenu sebeklamu” $D(q \parallel p)$
- vyber si akci a
- užij si subjektivní očekávání $E_q u(a, \theta)$

$$\max_{a, q} \{ E_q u(a, \theta) - D(q \parallel p) \}$$

$D(q \parallel p)$ – Kullback-Leibler divergence (“vzdálenost” mezi rozděleními)

Ekvivalence

individuální risk

Teorém

Evoluční proces s **individuálním** riskem selektuje tu samou akci jako toužební myšlení:

$$\max_a \ln E_{p,\alpha} e^{u(a,\theta)} = \max_{a,q} \{ E_{q,\alpha} u(a,\theta) - D(q \parallel p) \}$$

Teorie Velkých Deviací

Hod' 100x, 1000x, 1000 000x mincí

Zákon velkých čísel:

poměr panen a orlů bude pravděpodobně přibližně vyrovnaný

Avšak nastat může jakýkoliv poměr

Teorie Velkých Deviací zkoumá malé pravděpodobnosti netypických událostí

Sanovův Teorém:

Vygeneruj vzorek o délce N z rozdělení p

$$\Pr(\text{empirické rozdělení vzorku je } q) \approx e^{-D(q||p)N}$$

Náčrt Důkazu

Uvažuj časový horizont T , zafixuj akci a

Každá dynastie potomků zažije svoji posloupnost $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_T)$

Podíl dynastií, co zažijí empirické rozdělení q je $e^{-T \times D(q \| p)}$

Z dynastií, co zažijí empirické rozdělení q , přežije podíl $e^{T \times E_q u(a, \theta)}$

Míra přeživších linií, co zažily empirické rozdělení q , je

$$e^{T \times (E_q u(a, \theta) - D(q \| p))}$$

Nejrychleji rostoucí “velká deviace”

$$\arg \max_q \{E_q u(a, \theta) - D(q \| p)\}$$

Extrémní Nerovnost

Biologie:

- Téměř všichni jsme potomci nepatrné frakce původní populace

Ekonomie:

- Téměř všechnen majetek je vlastněn nepatrnou frakcí populace

Nerovnost nastává, ač mají všichni stejné příležitosti

Důsledek “selhání” zákonu velkých čísel

- nepatrná část populace má velké štěstí a dominuje

1 Agregátní Risk

Jak Předvídat Budoucnost bez Znalostí

a co to stojí

Pošli 64 000 dopisů náhodným adresátům:

- polovině předpověz, že akciový index stoupne,
- druhé polovině, že klesne.

O týden pošli 32 000 dopisů těm, kterým jsi správně předpověděl prvně

Zopakuj 6 x

Skončíš s tisícovkou adresátů, kterým jsi poslal 6 správných předpovědí

Ekvivalence

agregátní risk

Semínka se “učí”

Doba vzklíčení **přeživšího** semínka a příchod deště jsou **korelovány**

- selekce

Teorém

Evoluční proces s **agregátním** riskem selektuje to samé sdružené pravděpodobnostní rozdělení akcí a stavů jako model racionální nepozornosti.

Racionální Nepozornost

Model výhod a nákladů informací:

- vyber si akci $a \in A$
- odměna $u(a, \theta)$ ve stavu θ
- náhodný stav $\theta \sim p$
- svoji akci a můžeš jakkoliv korelovat se stavem θ
- avšak zaplatíš za informaci

$$\max_{q(\theta, a)} \{ E_q u(\mathbf{a}, \theta) - I_q(\theta; \mathbf{a}) \}$$

$$\text{s.t.: } \sum_a q(\theta, a) = p(\theta), \forall \theta$$

$I_q(\theta; \mathbf{a})$ – vzájemná informace

Náhled Důkazu

Některé dynastie však budou mít své akce empiricky korelované se stavy

- tyto dynastie se chovají informovaně šťastnou náhodou
- je jich málo,
- ale rychle rostou

Ekvivalence mezi

- vzácností velké deviace
- a cenou informace

K Čemu To Je?

Přesná personifikace makro- ekonomických či biologických procesů

Osvětlení možného zdroje nerovnosti

Transfer analytických metod mezi zdánlivě různými problémy